A propos d'un groupe d'associateurs

Hoang Ngoc Minh

Partant de l'équation KZ_3, *i.e.* l'équation différentielle fuchsienne d'ordre 1 avec les singularités régulières dans $\{0, 1, +\infty\}$ suivante (sans condition initiale) et en les indéterminées non commutatives $\{x_0, x_1\}$ $(= X)$ [3, 5] :

$$(DE) \quad dG = (x_0\omega_0 + x_1\omega_1)G \quad \text{avec} \quad \omega_0(z) = \frac{dz}{z}, \omega_1(z) = \frac{dz}{1-z}$$

et également de son groupe Galois différentiel, *i.e.* le groupe suivant [7]

$$\mathrm{Gal}_{\mathbb{C}}(DE) = \{e^C | C \in \mathcal{L}ie_{\mathbb{C}}\langle\langle X\rangle\rangle\},$$

nous décrivons un groupe d'associateurs contenant l'*associateur de Drinfel'd*, noté Φ_{KZ}, [3, 5] (déterminé de façon unique par cette équation différentielle et des conditions asymptotiques), *i.e.* le groupe suivant [8].

$$\begin{aligned} dm(A) &= \{\Phi_{KZ}e^C | C \in \mathcal{L}ie_A\langle\langle X\rangle\rangle, \langle e^C \mid x_0\rangle = \langle e^C \mid x_1\rangle = 0\} \\ &= \mathrm{Gal}_A^{\geq 2}(DE), \end{aligned}$$

où A est un anneau commutatif contenant $\mathbb{Q}$.

Ce groupe $dm(A)$ contient le groupe $DM(A)$ introduit dans [3, 9], *i.e.* et défini par les conditions suivantes : $\Phi \in DM(A)$ si et seulement si

$$\langle\Phi \mid 1_{X^*}\rangle = 1, \quad \langle\Phi \mid x_0\rangle = \langle\Phi \mid x_1\rangle = 0, \quad \Delta_{\sqcup\!\sqcup}\Phi = \Phi \otimes \Phi$$

et, pour tout

$$\Psi = \exp\Big(-\sum_{n\geq 2}\langle\pi_Y\Phi \mid y_n\rangle\frac{(-y_1)^n}{n}\Big)\pi_Y\Phi \in A\langle\langle Y\rangle\rangle,$$

on a

$$\Delta_{\uplus}\Psi = \Psi \otimes \Psi \quad \text{et} \quad \langle\Psi \mid 1_{Y^*}\rangle = 1,$$

Y étant l'alphabet $\{y_k\}_{k\geq 1}$ et π_Y est le morphisme de $(\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle x_1 \oplus \mathbb{C}1, ., 1_{X^*})$ dans $(\mathbb{C}\langle\langle Y\rangle\rangle, ., 1_{Y^*})$ défini par $\pi_Y x_0^{s_1-1}x_1 \ldots x_0^{s_r-1}x_1 \longmapsto y_{s_1}\ldots y_{s_r}$.

Nous exhibons également des exemples, non triviaux, de candidats associateurs à coefficients rationnels en régularisant des polyzêtas indexés par des multiindices entiers négatifs [6]. Ces derniers sont des intégrales itérées divergentes, sur ω_0, ω_1, dans $\Omega = \widetilde{\mathbb{C} \setminus \{0,1\}}$, et associées à une sous-classe de séries rationnelles en les indeterminées non commutatives dans X et à coefficients complexes [1].

Notons que chaque élément de la forme $\Phi = \Phi_{KZ}e^C$, avec $e^C \in \mathrm{Gal}_{\mathbb{C}}(DE)$, régularise une solution $\bar{\mathrm{L}} \in \mathcal{H}(\Omega)\langle\langle X\rangle\rangle$ de (DE) vérifiant

$$\bar{\mathrm{L}}(z) \sim_0 e^{x_0\log(z)}e^C \quad \text{et} \quad \bar{\mathrm{L}}(z) \;{}_1\!\!\sim e^{-x_1\log(1-z)}\Phi.$$

En plus, en définissant la série $\Psi \in \mathbb{C}\langle\langle Y \rangle\rangle$ comme suit [8]

$$\forall w \in X^* x_1, \quad \langle \Psi \mid \pi_Y w \rangle = \text{p.f.}_{n \to +\infty} \langle \langle \bar{\mathrm{L}} \mid w \rangle \mid n \rangle, \quad \{n^a \log^b(n)\}_{a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}},$$

les séries Φ, Ψ vérifient l'identité suivante [4, 8]

$$\prod_{l \in \mathcal{L}ynY}^{\searrow} e^{\langle \Psi | \Sigma_l \rangle \Pi_l} = \exp\left(\gamma y_1 - \sum_{k \geq 2} \zeta(y_k) \frac{(-y_1)^k}{k} \right) \pi_Y \prod_{l \in \mathcal{L}ynX}^{\searrow} e^{\langle \Phi | S_l \rangle P_l},$$

où, en équipant X et Y l'ordre, respectivement, $x_1 > x_0$ et $y_1 > y_2 > \ldots$,

— $\mathcal{L}ynX$ (resp. $\mathcal{L}ynY$) est l'ensemble des mots de Lyndon sur X (resp. Y),

— $\{P_l\}_{l \in \mathcal{L}ynX}$ (resp. $\{\Pi_l\}_{l \in \mathcal{L}ynY}$) est une base multi homogène de l'algèbre de Lie des éléments primitifs du bigèbre $(\mathbb{C}\langle X \rangle, ., 1_{X^*}, \Delta_{\sqcup\!\sqcup})$ [10] (resp. $(\mathbb{C}\langle Y \rangle, ., 1_{Y^*}, \Delta_{\uplus})$ [8]),

— $\{S_l\}_{l \in \mathcal{L}ynX}$ (resp. $\{\Sigma_l\}_{l \in \mathcal{L}ynY}$) est une base de transcendance de l'algèbre $(\mathbb{C}\langle X \rangle, \sqcup\!\sqcup, 1_{X^*})$ [10] (resp. $(\mathbb{C}\langle Y \rangle, \uplus, 1_{Y^*})$ [8]) telle que, pour tout $l_1, \ldots, l_i \in \mathcal{L}ynX$ (resp. $\mathcal{L}ynY$) et $l_1 \geq \ldots \geq l_i$, $\langle S_{l_1} \sqcup\!\sqcup \ldots \sqcup\!\sqcup S_{l_i} \mid P_{l_1} \ldots P_{l_i} \rangle = 1$ (resp. $\langle \Sigma_{l_1} \uplus \ldots \uplus \Sigma_{l_i} \mid \Pi_{l_1} \ldots \Pi_{l_i} \rangle = 1$) et 0 pour d'autres cas.

En identifiant les coordonnées locales dans cette identié, on obtient un système de relations polynomiales, homogènes en poids, entres les polyzêtas convergents $\{\zeta(S_l)\}_{l \in \mathcal{L}ynX - X}$ (resp. $\{\zeta(\Sigma_l)\}_{l \in \mathcal{L}ynY - \{y_1\}}$) [2, 8].

Références

[1] J. Berstel & C. Reutenauer.– *Rational series and their languages*, Springer-Verlag, 1988.

[2] V.C. Bùi, G.H.E. Duchamp, Hoang Ngoc Minh.– *Structure of Polyzetas and Explicit Representation on Transcendence Bases of Shuffle and Stuffle Algebras*, J. of Sym. Comp., 93-111 (2017).

[3] P. Cartier– *Fonctions polylogarithmes, nombres polyzetas et groupes prounipotents*– Séminaire BOURBAKI, 53$^{\text{ème}}$, n°885, 2000-2001.

[4] Costermans C., Hoang Ngoc Minh.– *Noncommutative algebra, multiple harmonic sums and applications in discrete probability*, J. of Sym. Comp., 801-817 (2009).

[5] V. Drinfel'd– *On quasitriangular quasi-hopf algebra and a group closely connected with Gal($\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$)*, Leningrad Math. J., 4, 829-860, 1991.

[6] G.H.E. Duchamp, Hoang Ngoc Minh, Q.H. Ngô, *Harmonic sums and polylogarithms at negative multi-indices*, J. of Sym. Comp., 166-186 (2017).

[7] Hoang Ngoc Minh.– Differential Galois groups and noncommutative generating series of polylogarithms, *Automata, Combinatorics & Geometry*, World Multi-conf. on Systemics, Cybernetics & Informatics, Florida, 2003.

[8] Hoang Ngoc Minh.– *On a conjecture by Pierre Cartier about a group of associators*, Acta Math. Vietnamica (2013), 38, Issue 3, 339-398.

[9] G. Racinet.– *Séries génératrices non-commutatives de polyzêtas et associateurs de Drinfel'd*, thèse, Amiens, 2000.

[10] Reutenauer C.– *Free Lie Algebras*, London Math. Soc. Monographs (1993).