

Autour d'un théorème de Christol

Alin Bostan
INRIA Saclay

Xavier Caruso
Université Rennes 1

Gilles Christol
Université Paris 6

Philippe Dumas
INRIA Saclay

Journées Nationales de
Calcul Formel

25 janvier 2018

Le théorème de Christol

Le théorème de Christol

Soit

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$

une série à coefficients dans \mathbb{F}_p

On suppose que $f(t)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(t)$

Alors la suite des (a_i) est p -automatique

Le théorème de Christol

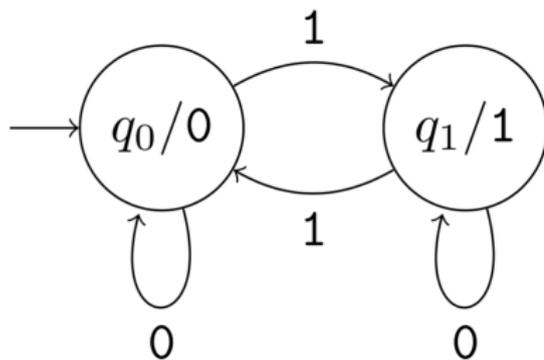
Soit

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$

une série à coefficients dans \mathbb{F}_p

On suppose que $f(t)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(t)$

Alors la suite des (a_i) est p -automatique



Le théorème de Christol

Soit

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$

une série à coefficients dans \mathbb{F}_p

On suppose que $f(t)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(t)$

Alors il existe un \mathbb{F}_p -espace vectoriel de dimension finie qui contient $f(t)$, et

qui est stable par les opérateurs de section S_r :

$$S_r(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots) = c_r + c_{r+p} t + c_{r+2p} t^2 + \cdots$$

pour $0 \leq r < p$

Le théorème de Christol

Soit

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$

une série à coefficients dans \mathbb{F}_q

On suppose que $f(t)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(t)$

Alors il existe un \mathbb{F}_q -espace vectoriel de dimension finie qui contient $f(t)$, et

qui est stable par les opérateurs de section S_r :

$$S_r(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots) = c_r + c_{r+p} t + c_{r+2p} t^2 + \cdots$$

pour $0 \leq r < p$

Le théorème de Christol

Soit

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots$$

une série à coefficients dans \mathbb{F}_q

On suppose que $f(t)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(t)$

Alors il existe un \mathbb{F}_q -espace vectoriel de dimension finie qui contient $f(t)$, et

qui est stable par les opérateurs de section S_r :

$$S_r(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots) = c_r^{1/p} + c_{r+p}^{1/p} t + c_{r+2p}^{1/p} t^2 + \cdots$$

pour $0 \leq r < p$

Notations

Notations

p – un nombre premier

Notations

- p – un nombre premier
- k – un corps parfait
de caractéristique p

Notations

p – un nombre premier

k – un corps parfait
de caractéristique p

$$S_r(c_0 + c_1 t + \dots) = c_r^{1/p} + c_{r+p}^{1/p} t + \dots$$

Notations

p – un nombre premier

k – un corps parfait
de caractéristique p

$$S_r(c_0 + c_1 t + \dots) = c_r^{1/p} + c_{r+p}^{1/p} t + \dots$$

$f(t)$ – une série formelle algébrique sur $k(t)$

Notations

p – un nombre premier

k – un corps parfait
de caractéristique p

$$S_r(c_0 + c_1 t + \dots) = c_r^{1/p} + c_{r+p}^{1/p} t + \dots$$

$f(t)$ – une série formelle algébrique sur $k(t)$

$E(t, y)$ – le polynôme minimal de $f(t)$
à coefficients dans $k[t]$

Notations

p – un nombre premier

k – un corps parfait
de caractéristique p

$$S_r(c_0 + c_1 t + \dots) = c_r^{1/p} + c_{r+p}^{1/p} t + \dots$$

$f(t)$ – une série formelle algébrique sur $k(t)$

$E(t, y)$ – le polynôme minimal de $f(t)$
à coefficients dans $k[t]$

d – le degré en y de E

h – le degré en t de E

Première démonstration

Première démonstration

– pour les analystes –

Un journal Elsevier...
mais un article en accès libre

Theoretical Computer Science 9 (1979) 141-145
© North-Holland Publishing Company

NOTE

**ENSEMBLES PRESQUE PERIODIQUES
 k -RECONNAISSABLES**

Gilles CHRISTOL

Université Paris 6, Paris, France

Communicated by Maurice NIVAT
Received May 1978

Abstract. We characterize the automata which recognize almost periodic sets of written in k basis integral numbers.

Le théorème de Furstenberg

Le théorème de Furstenberg

On définit :

$$\text{Diag} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} x^i y^j \right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ii} t^i$$

Le théorème de Furstenberg

On définit :

$$\text{Diag} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} x^i y^j \right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ii} t^i$$

Si $E(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial E}{\partial y}(0, 0) \neq 0$

Le théorème de Furstenberg

On définit :

$$\text{Diag} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} x^i y^j \right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ii} t^i$$

Si $E(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial E}{\partial y}(0, 0) \neq 0$, alors :

$$f(t) = \text{Diag } g \quad \text{où} \quad g(x, y) = \frac{y \cdot \frac{\partial E}{\partial y}(xy, y)}{y^{-1} \cdot E(xy, y)}$$

Le théorème de Furstenberg

On définit :

$$\text{Diag} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} x^i y^j \right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ii} t^i$$

Si $E(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial E}{\partial y}(0, 0) \neq 0$, alors :

$$f(t) = \text{Diag } g \quad \text{où} \quad g(x, y) = \frac{y \cdot \frac{\partial E}{\partial y}(xy, y)}{y^{-1} \cdot E(xy, y)}$$

Démonstration

Le théorème de Furstenberg

On définit :

$$\text{Diag} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} x^i y^j \right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ii} t^i$$

Si $E(0,0) = 0$ et $\frac{\partial E}{\partial y}(0,0) \neq 0$, alors :

$$f(t) = \text{Diag } g \quad \text{où} \quad g(x,y) = \frac{y \cdot \frac{\partial E}{\partial y}(xy, y)}{y^{-1} \cdot E(xy, y)}$$

Démonstration (pour $k = \mathbb{C}$)

Le théorème de Furstenberg

On définit :

$$\text{Diag} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} x^i y^j \right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ii} t^i$$

Si $E(0,0) = 0$ et $\frac{\partial E}{\partial y}(0,0) \neq 0$, alors :

$$f(t) = \text{Diag } g \quad \text{où} \quad g(x,y) = \frac{y \cdot \frac{\partial E}{\partial y}(xy, y)}{y^{-1} \cdot E(xy, y)}$$

Démonstration (pour $k = \mathbb{C}$)

$$\oint_{|y|=\varepsilon} y^{-1} g\left(\frac{t}{y}, y\right) dy$$

Le théorème de Furstenberg

On définit :

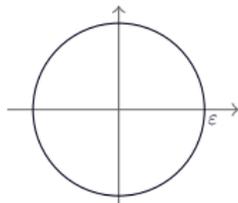
$$\text{Diag} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} x^i y^j \right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ii} t^i$$

Si $E(0,0) = 0$ et $\frac{\partial E}{\partial y}(0,0) \neq 0$, alors :

$$f(t) = \text{Diag } g \quad \text{où} \quad g(x,y) = \frac{y \cdot \frac{\partial E}{\partial y}(xy, y)}{y^{-1} \cdot E(xy, y)}$$

Démonstration (pour $k = \mathbb{C}$)

$$\oint_{|y|=\varepsilon} y^{-1} g\left(\frac{t}{y}, y\right) dy$$



Le théorème de Furstenberg

On définit :

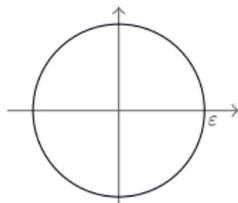
$$\text{Diag} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} x^i y^j \right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ii} t^i$$

Si $E(0,0) = 0$ et $\frac{\partial E}{\partial y}(0,0) \neq 0$, alors :

$$f(t) = \text{Diag } g \quad \text{où} \quad g(x,y) = \frac{y \cdot \frac{\partial E}{\partial y}(xy, y)}{y^{-1} \cdot E(xy, y)}$$

Démonstration (pour $k = \mathbb{C}$)

$$\oint_{|y|=\varepsilon} y^{-1} g\left(\frac{t}{y}, y\right) dy = \oint_{|y|=\varepsilon} \frac{y \frac{\partial E}{\partial y}(t, y)}{E(t, y)} dy$$



Le théorème de Furstenberg

On définit :

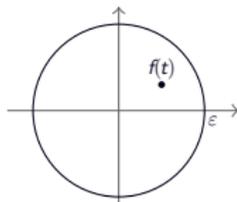
$$\text{Diag} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} x^i y^j \right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ii} t^i$$

Si $E(0,0) = 0$ et $\frac{\partial E}{\partial y}(0,0) \neq 0$, alors :

$$f(t) = \text{Diag } g \quad \text{où} \quad g(x,y) = \frac{y \cdot \frac{\partial E}{\partial y}(xy, y)}{y^{-1} \cdot E(xy, y)}$$

Démonstration (pour $k = \mathbb{C}$)

$$\oint_{|y|=\varepsilon} y^{-1} g\left(\frac{t}{y}, y\right) dy = \oint_{|y|=\varepsilon} \frac{y \frac{\partial E}{\partial y}(t,y)}{E(t,y)} dy$$



Le théorème de Furstenberg

On définit :

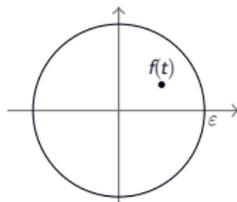
$$\text{Diag} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} x^i y^j \right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ii} t^i$$

Si $E(0,0) = 0$ et $\frac{\partial E}{\partial y}(0,0) \neq 0$, alors :

$$f(t) = \text{Diag } g \quad \text{où} \quad g(x,y) = \frac{y \cdot \frac{\partial E}{\partial y}(xy, y)}{y^{-1} \cdot E(xy, y)}$$

Démonstration (pour $k = \mathbb{C}$)

$$\oint_{|y|=\varepsilon} y^{-1} g\left(\frac{t}{y}, y\right) dy = \oint_{|y|=\varepsilon} \frac{y \frac{\partial E}{\partial y}(t,y)}{E(t,y)} dy = 2i\pi \cdot f(t)$$



Le théorème de Furstenberg

On définit :

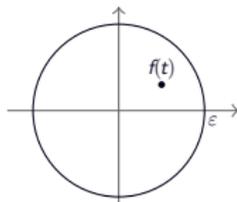
$$\text{Diag} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} x^i y^j \right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ii} t^i$$

Si $E(0,0) = 0$ et $\frac{\partial E}{\partial y}(0,0) \neq 0$, alors :

$$f(t) = \text{Diag } g \quad \text{où} \quad g(x,y) = \frac{y \cdot \frac{\partial E}{\partial y}(xy, y)}{y^{-1} \cdot E(xy, y)}$$

Démonstration (pour $k = \mathbb{C}$)

$$\begin{aligned} \oint_{|y|=\varepsilon} y^{-1} g\left(\frac{t}{y}, y\right) dy &= \oint_{|y|=\varepsilon} \frac{y \frac{\partial E}{\partial y}(t,y)}{E(t,y)} dy = 2i\pi \cdot f(t) \\ &= \oint_{|y|=\varepsilon} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} t^i y^{j-i-1} dy \end{aligned}$$



Le théorème de Furstenberg

On définit :

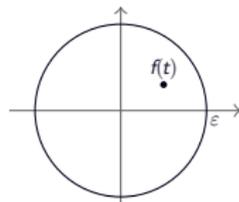
$$\text{Diag} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} x^i y^j \right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ii} t^i$$

Si $E(0,0) = 0$ et $\frac{\partial E}{\partial y}(0,0) \neq 0$, alors :

$$f(t) = \text{Diag } g \quad \text{où} \quad g(x,y) = \frac{y \cdot \frac{\partial E}{\partial y}(xy, y)}{y^{-1} \cdot E(xy, y)}$$

Démonstration (pour $k = \mathbb{C}$)

$$\oint_{|y|=\varepsilon} y^{-1} g\left(\frac{t}{y}, y\right) dy = \oint_{|y|=\varepsilon} \frac{y \frac{\partial E}{\partial y}(t,y)}{E(t,y)} dy = 2i\pi \cdot f(t)$$



$$= \oint_{|y|=\varepsilon} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} t^i y^{j-i-1} dy = 2i\pi \cdot \text{Diag } g$$

L'argument de Christol

L'argument de Christol

Théorème de Furstenberg : $f(t) = \text{Diag } \frac{a(x, y)}{b(x, y)}$

L'argument de Christol

Théorème de Furstenberg : $f(t) = \text{Diag } \frac{a(x, y)}{b(x, y)}$

$S_r f(t)$

L'argument de Christol

Théorème de Furstenberg : $f(t) = \text{Diag } \frac{a(x,y)}{b(x,y)}$

$$S_r f(t) = S_r \left(\text{Diag } \frac{a(x,y)}{b(x,y)} \right)$$

L'argument de Christol

Théorème de Furstenberg : $f(t) = \text{Diag } \frac{a(x,y)}{b(x,y)}$

$$S_r f(t) = S_r \left(\text{Diag } \frac{a(x,y)}{b(x,y)} \right) = \text{Diag } S_r \left(\frac{a(x,y)}{b(x,y)} \right)$$

L'argument de Christol

Théorème de Furstenberg : $f(t) = \text{Diag } \frac{a(x, y)}{b(x, y)}$

$$S_r f(t) = S_r \left(\text{Diag } \frac{a(x, y)}{b(x, y)} \right) = \text{Diag } S_r \left(\frac{a(x, y)}{b(x, y)} \right) = \text{Diag } \frac{T_{r,b}(a(x, y))}{b(x, y)}$$

$$\text{avec } T_{r,b}(a(x, y)) = S_r(a(x, y)b(x, y)^{p-1})$$

L'argument de Christol

Théorème de Furstenberg : $f(t) = \text{Diag } \frac{a(x, y)}{b(x, y)}$

$$S_r \left(\text{Diag } \frac{u(x, y)}{b(x, y)} \right) = \text{Diag } S_r \left(\frac{u(x, y)}{b(x, y)} \right) = \text{Diag } \frac{T_{r, b}(u(x, y))}{b(x, y)}$$

$$\text{avec } T_{r, b}(u(x, y)) = S_r(u(x, y) b(x, y)^{p-1})$$

L'argument de Christol

Théorème de Furstenberg : $f(t) = \text{Diag } \frac{a(x, y)}{b(x, y)}$

$$S_r \left(\text{Diag } \frac{u(x, y)}{b(x, y)} \right) = \text{Diag } S_r \left(\frac{u(x, y)}{b(x, y)} \right) = \text{Diag } \frac{T_{r,b}(u(x, y))}{b(x, y)}$$

$$\text{avec } T_{r,b}(u(x, y)) = S_r(u(x, y)b(x, y)^{p-1})$$

Les $T_{r,b}$ stabilisent l'espace $k[x, y]_{\leq (n, m)}$
si $n \geq \deg_x b$ et $m \geq \deg_y b$

L'argument de Christol

Théorème de Furstenberg : $f(t) = \text{Diag } \frac{a(x, y)}{b(x, y)}$

$$S_r \left(\text{Diag } \frac{u(x, y)}{b(x, y)} \right) = \text{Diag } S_r \left(\frac{u(x, y)}{b(x, y)} \right) = \text{Diag } \frac{T_{r, b}(u(x, y))}{b(x, y)}$$

$$\text{avec } T_{r, b}(u(x, y)) = S_r(u(x, y)b(x, y)^{p-1})$$

Les $T_{r, b}$ stabilisent l'espace $k[x, y]_{\leq (n, m)}$
si $n \geq \deg_x b$ et $m \geq \deg_y b$

Les S_r stabilisent l'espace $\text{Diag} \left(\frac{1}{b(x, y)} \cdot k[x, y]_{\leq (n, m)} \right)$
si $n \geq \deg_x b$ et $m \geq \deg_y b$

L'argument de Christol

Théorème de Furstenberg : $f(t) = \text{Diag } \frac{a(x, y)}{b(x, y)}$

$$S_r \left(\text{Diag } \frac{u(x, y)}{b(x, y)} \right) = \text{Diag } S_r \left(\frac{u(x, y)}{b(x, y)} \right) = \text{Diag } \frac{T_{r,b}(u(x, y))}{b(x, y)}$$

$$\text{avec } T_{r,b}(u(x, y)) = S_r(u(x, y)b(x, y)^{p-1})$$

Les $T_{r,b}$ stabilisent l'espace $k[x, y]_{\leq (n, m)}$
si $n \geq \deg_x b$ et $m \geq \deg_y b$

Les S_r stabilisent l'espace $\text{Diag} \left(\frac{1}{b(x, y)} \cdot k[x, y]_{\leq (n, m)} \right)$
si $n \geq \deg_x b$ et $m \geq \deg_y b$



Deuxième démonstration

Deuxième démonstration

— pour les géomètres —

Un séminaire confidentiel

<https://sbseminar.wordpress.com/2010/02/11/christols-theorem-and-the-cartier-operator/>

Secret Blogging Seminar

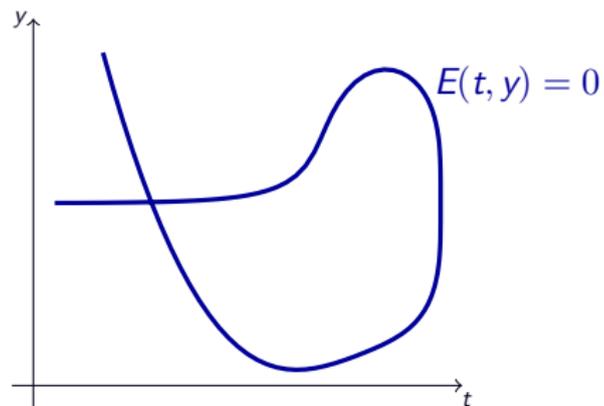


Christol's theorem and the Cartier operator

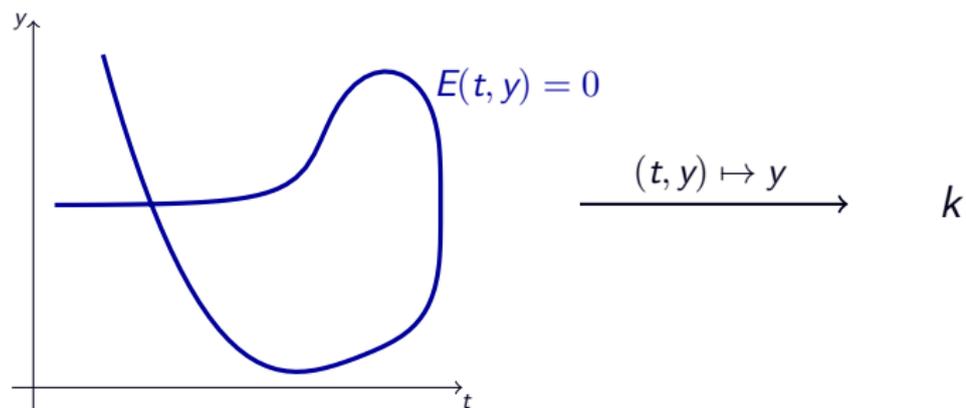
Let's suppose that we want to compute $\sum_{i=0}^{n-1} p_i$ and we have already been given n written out in base p as $n = \sum n_i p^i$. Here p is a small prime and we want to do this conversation repeatedly for many n 's.

La situation géométrique

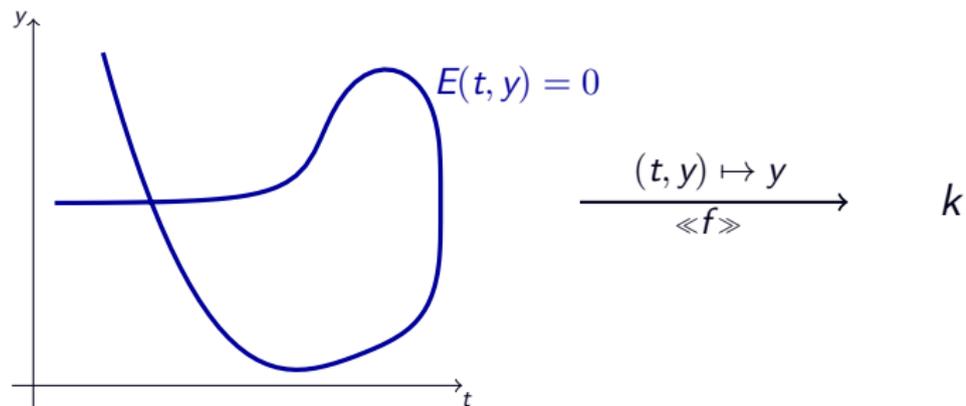
La situation géométrique



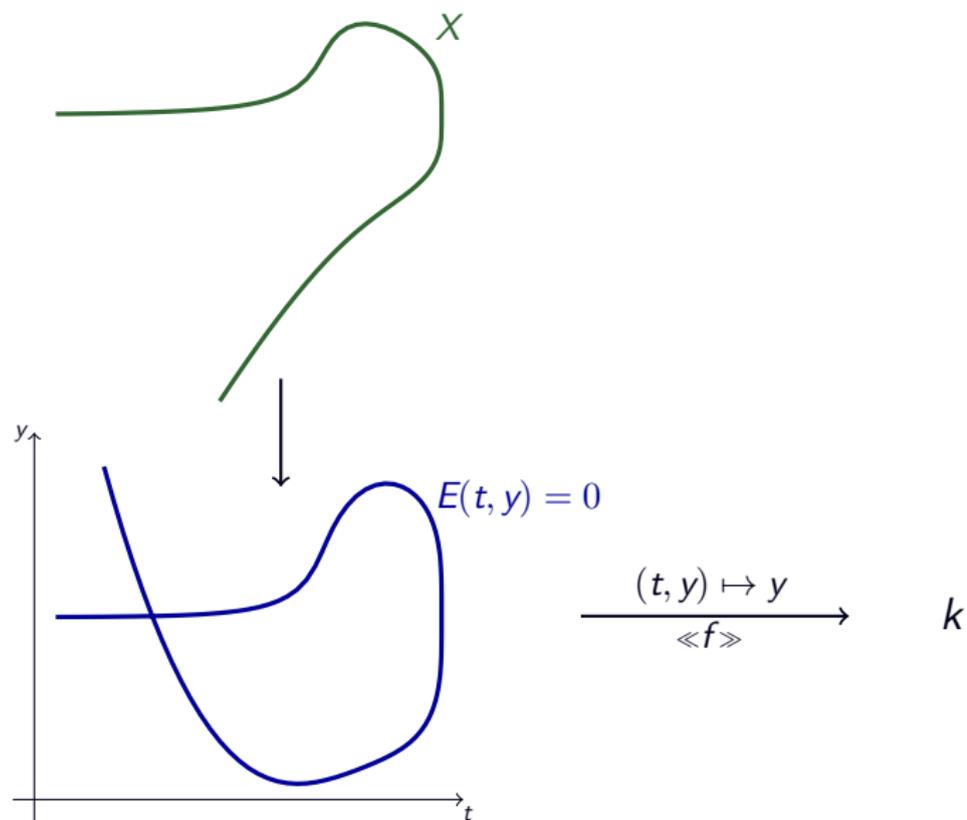
La situation géométrique



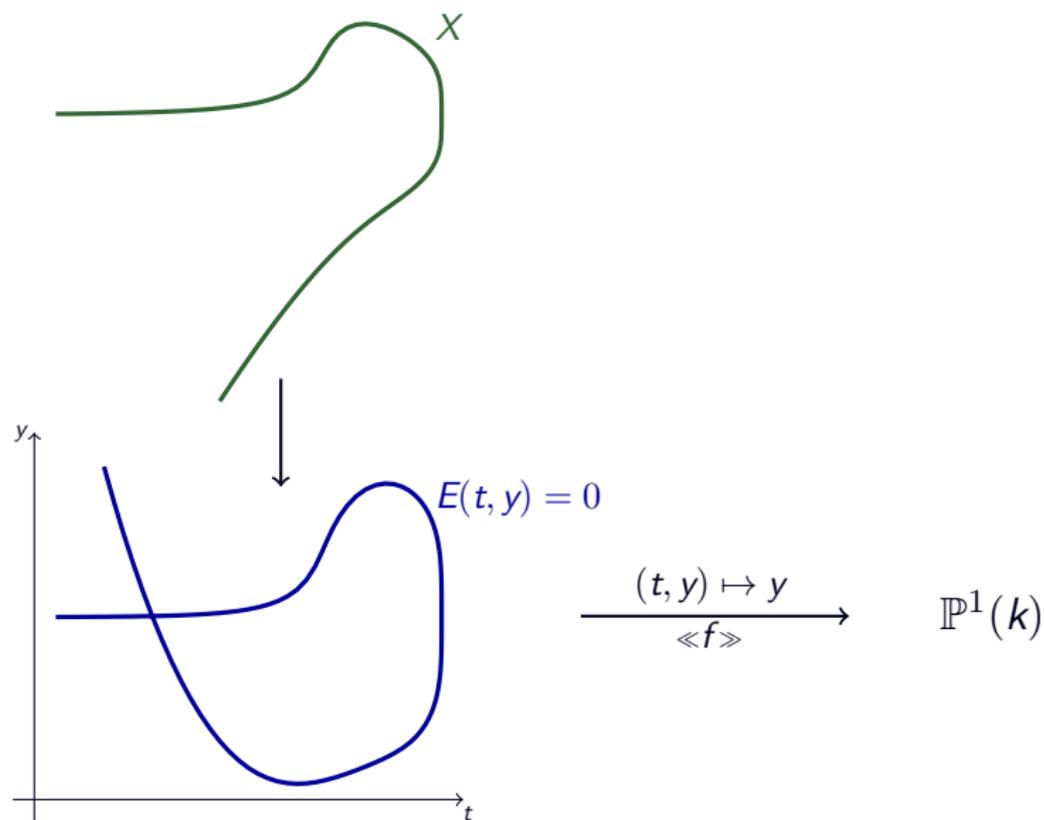
La situation géométrique



La situation géométrique



La situation géométrique



L'opérateur de Cartier

L'opérateur de Cartier

Soit X une courbe non singulière en caractéristique p

L'opérateur de Cartier

Soit X une courbe non singulière en caractéristique p

Soit t est une coordonnée sur X

L'opérateur de Cartier

Soit X une courbe non singulière en caractéristique p

Soit t est une coordonnée sur X

Définition

L'opérateur de Cartier

Soit X une courbe non singulière en caractéristique p

Soit t est une coordonnée sur X

Définition :
$$\sum_{i=0}^{p-1} g_i(t)^p t^i dt$$

L'opérateur de Cartier

Soit X une courbe non singulière en caractéristique p

Soit t est une coordonnée sur X

Définition :
$$\sum_{i=0}^{p-1} g_i(t)^p t^i dt \longmapsto g_{p-1}(t) dt$$

L'opérateur de Cartier

Soit X une courbe non singulière en caractéristique p

Soit t est une coordonnée sur X

Définition :
$$\sum_{i=0}^{p-1} g_i(t)^p t^i dt \longmapsto g_{p-1}(t) dt$$

Exemples

L'opérateur de Cartier

Soit X une courbe non singulière en caractéristique p

Soit t est une coordonnée sur X

Définition :
$$\sum_{i=0}^{p-1} g_i(t)^p t^i dt \longmapsto g_{p-1}(t) dt$$

Exemples

$X =$ la droite affine

L'opérateur de Cartier

Soit X une courbe non singulière en caractéristique p

Soit t est une coordonnée sur X

Définition :
$$\sum_{i=0}^{p-1} g_i(t)^p t^i dt \longmapsto g_{p-1}(t) dt$$

Exemples

$X =$ la droite affine



L'opérateur de Cartier

Soit X une courbe non singulière en caractéristique p

Soit t est une coordonnée sur X

Définition :
$$\sum_{i=0}^{p-1} g_i(t)^p t^i dt \longmapsto g_{p-1}(t) dt$$

Exemples

$X =$ la droite affine



$$(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots) dt \longmapsto (c_{p-1}^{1/p} + c_{2p-1}^{1/p} t + \dots) dt$$

L'opérateur de Cartier

Soit X une courbe non singulière en caractéristique p

Soit t est une coordonnée sur X

Définition :
$$\sum_{i=0}^{p-1} g_i(t)^p t^i dt \longmapsto g_{p-1}(t) dt$$

Exemples

$X =$ la droite affine



$$(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots) dt \longmapsto (c_{p-1}^{1/p} + c_{2p-1}^{1/p} t + \dots) dt$$

$$P(t) dt \longmapsto S_{p-1}(P(t)) dt$$

L'opérateur de Cartier

Soit X une courbe non singulière en caractéristique p

Soit t est une coordonnée sur X

Définition : $\sum_{i=0}^{p-1} g_i(t)^p t^i dt \mapsto g_{p-1}(t) dt$

Exemples

$X =$ la droite affine



$$(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots) dt \mapsto (c_{p-1}^{1/p} + c_{2p-1}^{1/p} t + \dots) dt$$

$$P(t) dt \mapsto S_{p-1}(P(t)) dt$$

L'opérateur de Cartier

Soit X une courbe non singulière en caractéristique p

Soit t est une coordonnée sur X

Définition : $\sum_{i=0}^{p-1} g_i(t)^p t^i dt \longmapsto g_{p-1}(t) dt$

Exemples

$X =$ la droite affine



$$(c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \dots) du \longmapsto (c_{p-1}^{1/p} + c_{2p-1}^{1/p} u + \dots) du$$

$$P(u) du \longmapsto S_{p-1}(P(u)) du$$

L'opérateur de Cartier

Soit X une courbe non singulière en caractéristique p

Soit t est une coordonnée sur X

Définition :
$$\sum_{i=0}^{p-1} g_i(t)^p t^i dt \longmapsto g_{p-1}(t) dt$$

Exemples

$X =$ la droite affine



$$(c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \dots) du \longmapsto (c_{p-1}^{1/p} + c_{2p-1}^{1/p} u + \dots) du$$

$$P(u) du \longmapsto S_{p-1}(P(u)) du$$

$X =$ un voisinage formel de a

L'opérateur de Cartier

Soit X une courbe non singulière en caractéristique p

Soit t est une coordonnée sur X

Définition :
$$\sum_{i=0}^{p-1} g_i(t)^p t^i dt \longmapsto g_{p-1}(t) dt$$

Exemples

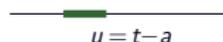
$X =$ la droite affine



$$(c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \dots) du \longmapsto (c_{p-1}^{1/p} + c_{2p-1}^{1/p} u + \dots) du$$

$$P(u) du \longmapsto S_{p-1}(P(u)) du$$

$X =$ un voisinage formel de a



L'opérateur de Cartier

Soit X une courbe non singulière en caractéristique p

Soit t est une coordonnée sur X

Définition : $\sum_{i=0}^{p-1} g_i(t)^p t^i dt \mapsto g_{p-1}(t) dt$

Exemples

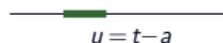
$X =$ la droite affine



$$(c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \dots) du \mapsto (c_{p-1}^{1/p} + c_{2p-1}^{1/p} u + \dots) du$$

$$P(u) du \mapsto S_{p-1}(P(u)) du$$

$X =$ un voisinage formel de a



$$s(u) du \mapsto S_{p-1}(s(u)) du$$

L'opérateur de Cartier

Soit X une courbe non singulière en caractéristique p

Soit t est une coordonnée sur X

Définition :
$$\sum_{i=0}^{p-1} g_i(t)^p t^i dt \longmapsto g_{p-1}(t) dt$$

Exemples

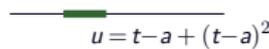
$X =$ la droite affine



$$(c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \dots) du \longmapsto (c_{p-1}^{1/p} + c_{2p-1}^{1/p} u + \dots) du$$

$$P(u) du \longmapsto S_{p-1}(P(u)) du$$

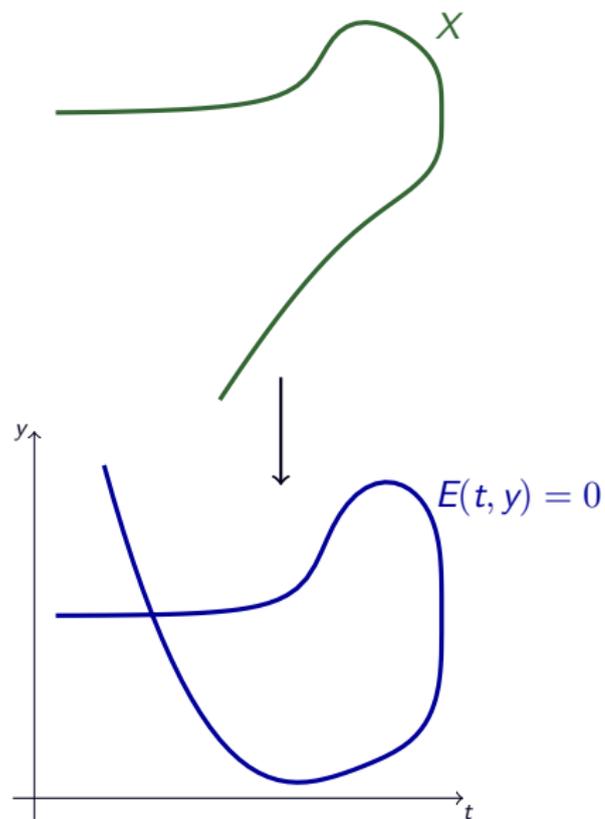
$X =$ un voisinage formel de a



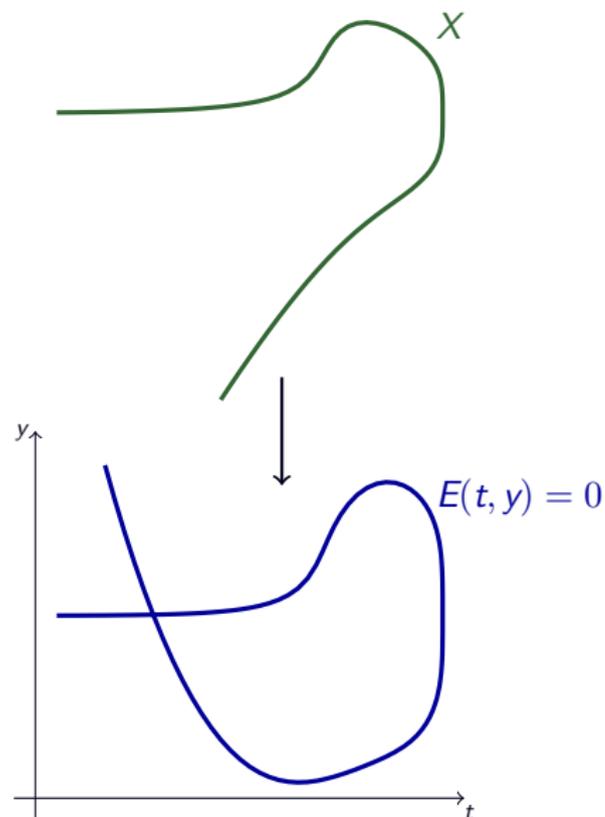
$$s(u) du \longmapsto S_{p-1}(s(u)) du$$

L'argument de Speyer

L'argument de Speyer

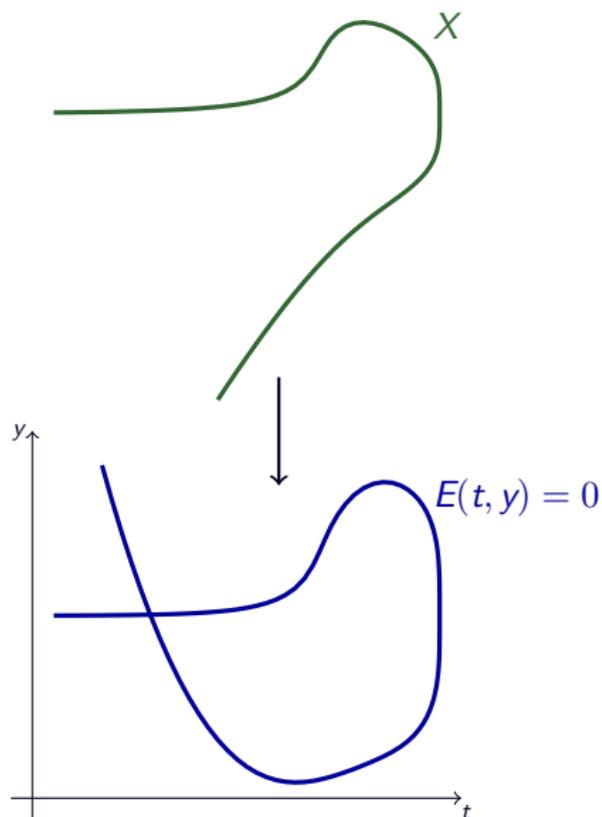


L'argument de Speyer



Soit \mathcal{L} l'espace des formes différentielles sur X qui des pôles contrôlés à l'infini et aux points d'indétermination de $f(t)$

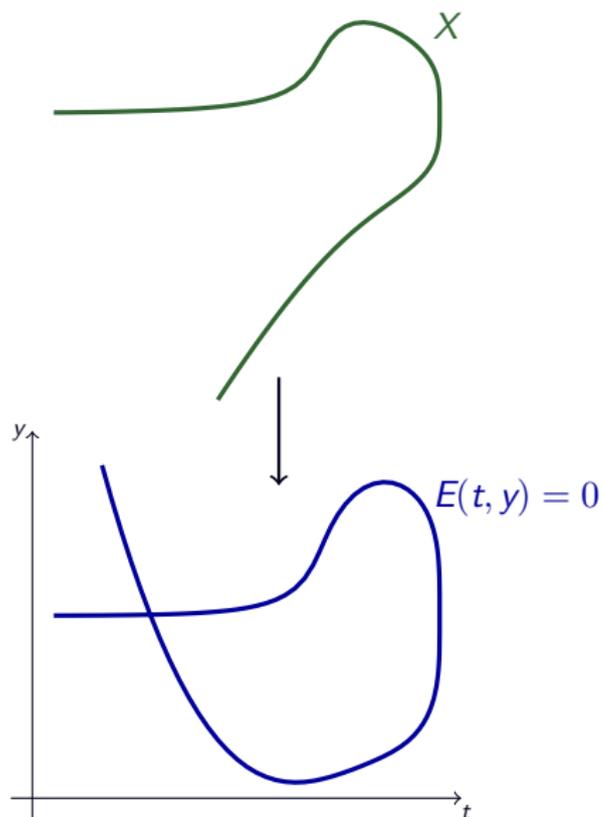
L'argument de Speyer



Soit \mathcal{L} l'espace des formes différentielles sur X qui des pôles contrôlés à l'infini et aux points d'indétermination de $f(t)$

Opérateur de Cartier

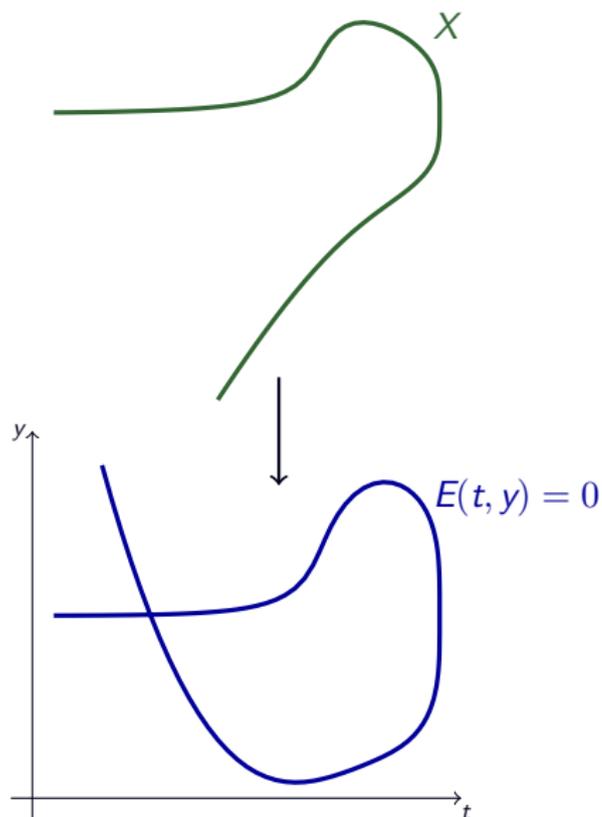
L'argument de Speyer



Soit \mathcal{L} l'espace des formes différentielles sur X qui des pôles contrôlés à l'infini et aux points d'indétermination de $f(t)$

Opérateur de Cartier
 \mathcal{L} est stable par C

L'argument de Speyer



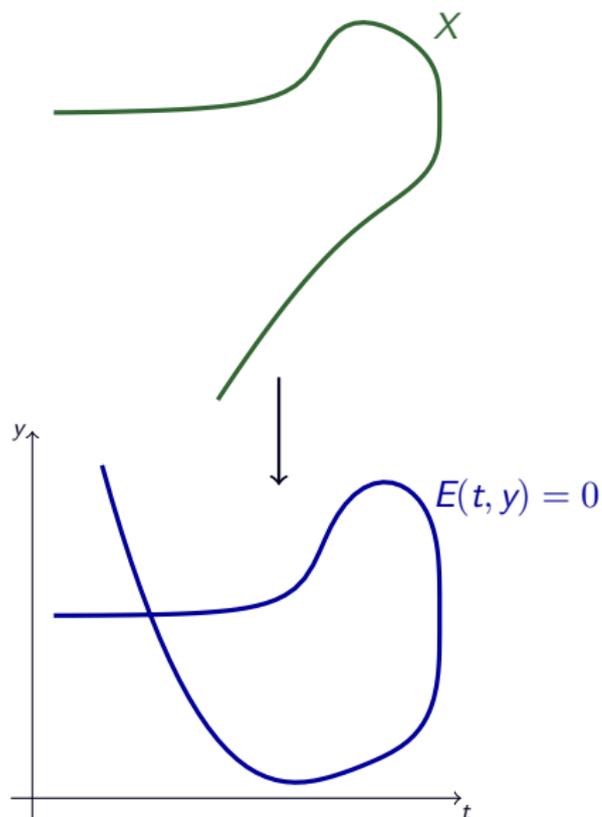
Soit \mathcal{L} l'espace des formes différentielles sur X qui des pôles contrôlés à l'infini et aux points d'indétermination de $f(t)$

Opérateur de Cartier

\mathcal{L} est stable par C

$$S_{p-1}(g) dt = C(g dt)$$

L'argument de Speyer



Soit \mathcal{L} l'espace des formes différentielles sur X qui des pôles contrôlés à l'infini et aux points d'indétermination de $f(t)$

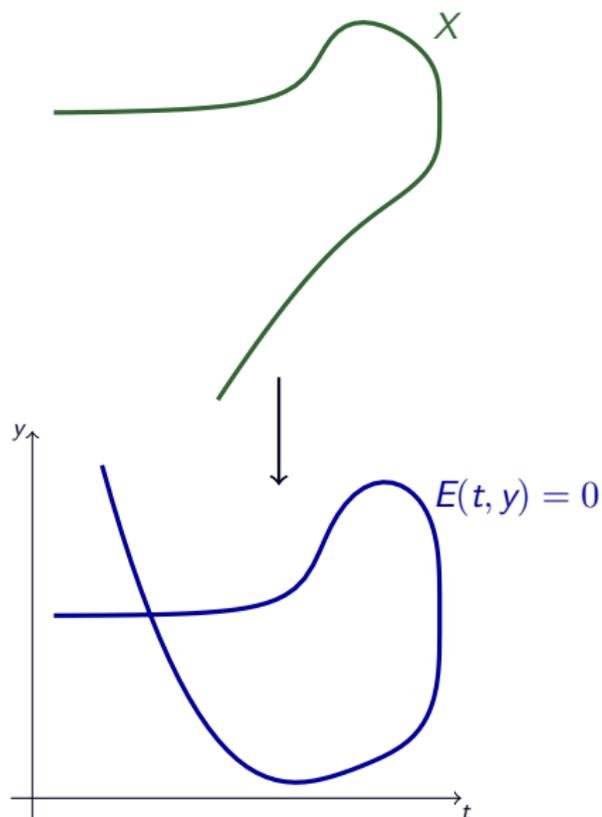
Opérateur de Cartier

\mathcal{L} est stable par C

$$S_{p-1}(g) dt = C(g dt)$$

$$S_r(g) dt = C(t^{p-1-r} g dt)$$

L'argument de Speyer



Soit \mathcal{L} l'espace des formes différentielles sur X qui des pôles contrôlés à l'infini et aux points d'indétermination de $f(t)$

Opérateur de Cartier

\mathcal{L} est stable par C

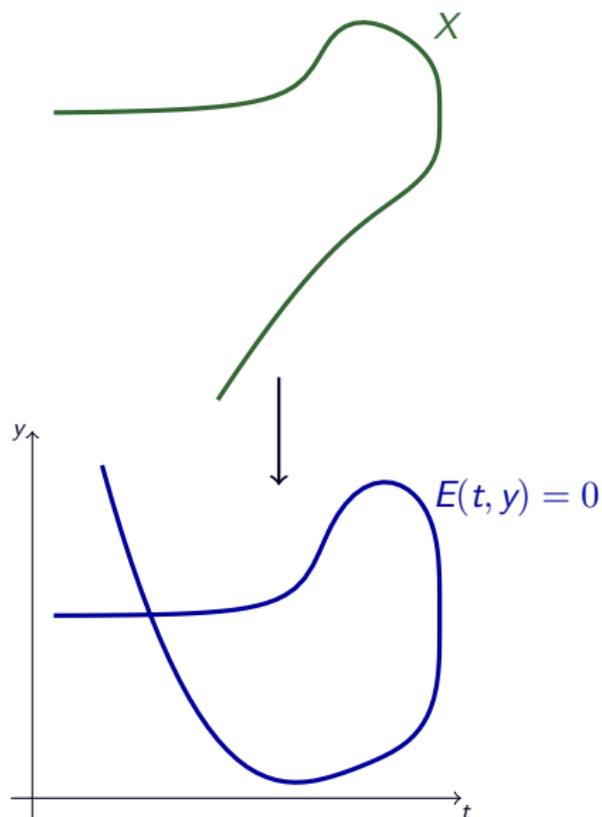
$$S_{p-1}(g) dt = C(g dt)$$

$$S_r(g) dt = C(t^{p-1-r} g dt)$$

Riemann-Roch

\mathcal{L} est de dimension finie sur k

L'argument de Speyer



Soit \mathcal{L} l'espace des formes différentielles sur X qui des pôles contrôlés à l'infini et aux points d'indétermination de $f(t)$

Opérateur de Cartier

\mathcal{L} est stable par C

$$S_{p-1}(g) dt = C(g dt)$$

$$S_r(g) dt = C(t^{p-1-r} g dt)$$

Riemann-Roch

\mathcal{L} est de dimension finie sur k



Troisième démonstration

Troisième démonstration

– pour les algébristes –

Le Frobenius et son inverse

Le Frobenius et son inverse

$$k((t)) \xrightarrow{\text{Frob} : x \mapsto x^p} k((t))$$

Le Frobenius et son inverse

$$k((t^{1/p})) \xrightarrow{\text{Frob} : x \mapsto x^p} k((t))$$

Le Frobenius et son inverse

$$k((t^{1/p})) \xrightarrow[\sim]{\text{Frob} : x \mapsto x^p} k((t))$$

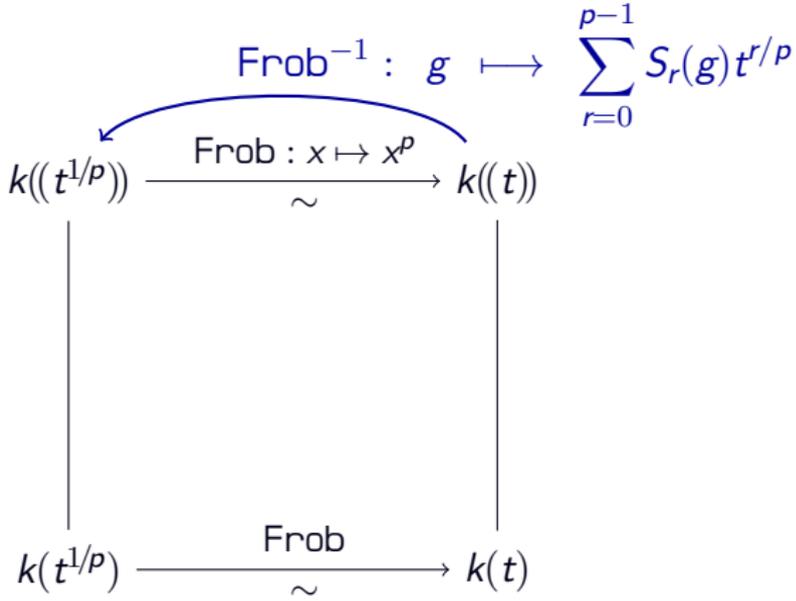
Le Frobenius et son inverse

$$\begin{array}{ccc} & \text{Frob}^{-1} & \\ & \curvearrowright & \\ k((t^{1/p})) & \xrightarrow{\text{Frob} : x \mapsto x^p} & k((t)) \\ & \sim & \end{array}$$

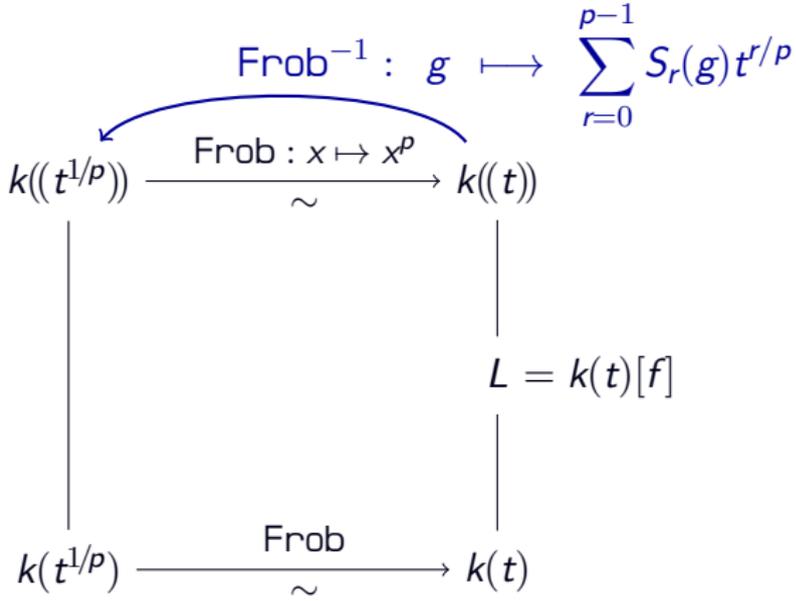
Le Frobenius et son inverse

$$\begin{array}{ccc} & \text{Frob}^{-1} : g \mapsto & \sum_{r=0}^{p-1} S_r(g) t^{r/p} \\ & \curvearrowright & \\ k((t^{1/p})) & \xrightarrow{\text{Frob} : x \mapsto x^p} & k((t)) \\ & \sim & \end{array}$$

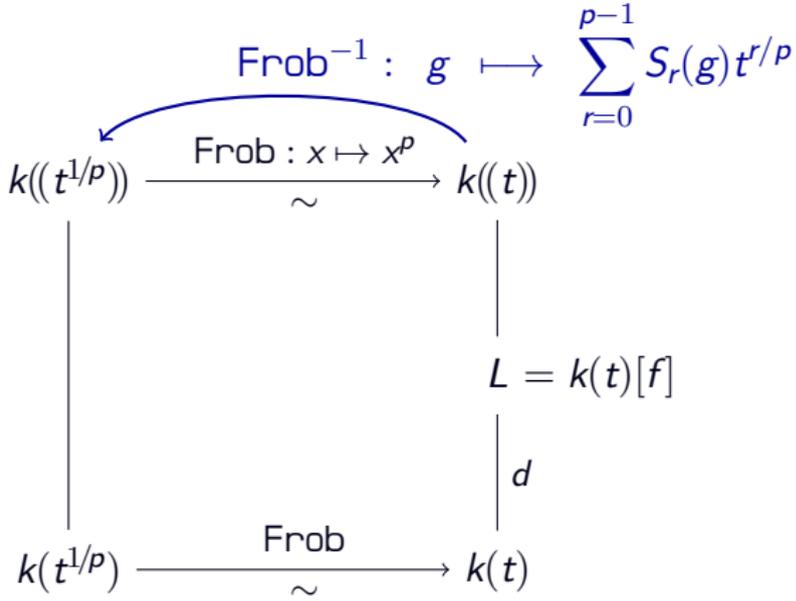
Le Frobenius et son inverse



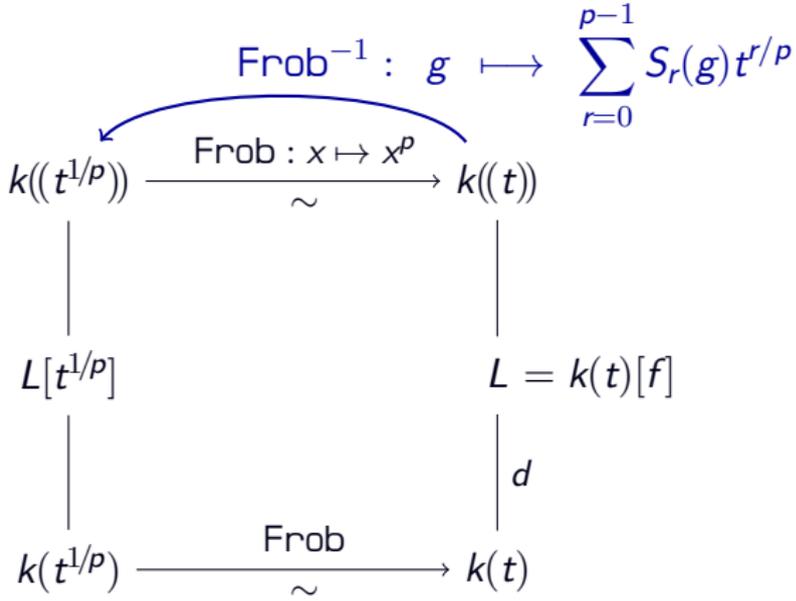
Le Frobenius et son inverse



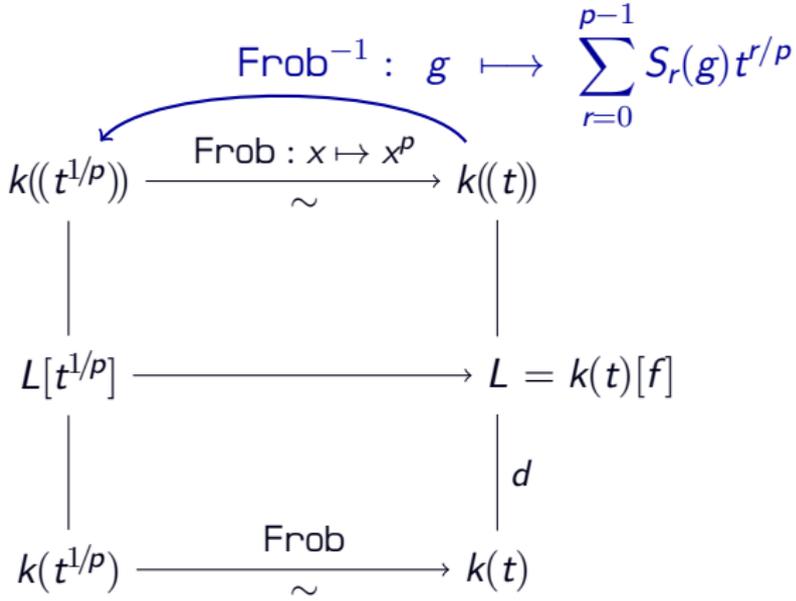
Le Frobenius et son inverse



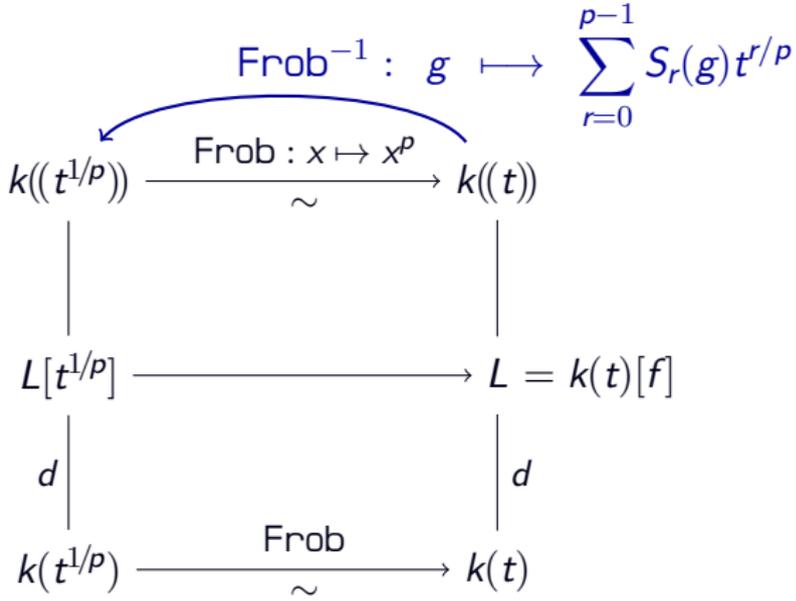
Le Frobenius et son inverse



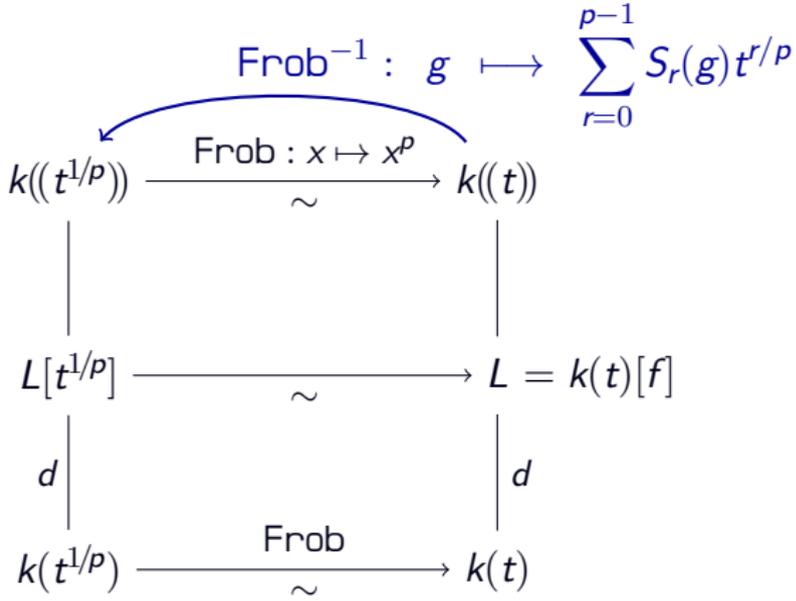
Le Frobenius et son inverse



Le Frobenius et son inverse



Le Frobenius et son inverse



Le Frobenius et son inverse

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Frob}^{-1} : g \mapsto \sum_{r=0}^{p-1} S_r(g) t^{r/p} & \\
 & \curvearrowright & \\
 k((t^{1/p})) & \xrightarrow[\sim]{\text{Frob} : x \mapsto x^p} & k((t)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 L[t^{1/p}] & \xrightarrow[\sim]{} & L = k(t)[f] \\
 \downarrow d & & \downarrow d \\
 k(t^{1/p}) & \xrightarrow[\sim]{\text{Frob}} & k(t)
 \end{array}$$

Conclusion : Le corps L est stable par les S_r

Le Frobenius et son inverse

$$\begin{array}{ccc} & \text{Frob}^{-1} : g \mapsto \sum_{r=0}^{p-1} S_r(g) t^{r/p} & \\ & \curvearrowright & \\ k((t^{1/p})) & \xrightarrow[\sim]{\text{Frob} : x \mapsto x^p} & k((t)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L[t^{1/p}] & \xrightarrow[\sim]{} & L = k(t)[f] \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ k(t^{1/p}) & \xrightarrow[\sim]{\text{Frob}} & k(t) \end{array}$$

Conclusion : Le corps L est stable par les S_r

Son anneau des entiers \mathcal{O}_L aussi

Une borne sur les degrés

Une borne sur les degrés

Hypothèse simplificatrice : $f(t) \in \mathcal{O}_L$

Une borne sur les degrés

Hypothèse simplificatrice : $f(t) \in \mathcal{O}_L$

Soit $g_1(t), \dots, g_d(t)$ une base de \mathcal{O}_L sur $k[t]$

Une borne sur les degrés

Hypothèse simplificatrice : $f(t) \in \mathcal{O}_L$

Soit $g_1(t), \dots, g_d(t)$ une base de \mathcal{O}_L sur $k[t]$

Soit $E_n = \left\{ \sum_{i=1}^d \lambda_i(t) g_i(t), \deg \lambda_i(t) \leq n \right\}$

Une borne sur les degrés

Hypothèse simplificatrice : $f(t) \in \mathcal{O}_L$

Soit $g_1(t), \dots, g_d(t)$ une base de \mathcal{O}_L sur $k[t]$

$$\text{Soit } E_n = \left\{ \sum_{i=1}^d \lambda_i(t) g_i(t), \text{ deg } \lambda_i(t) \leq n \right\}$$

$$\dim_k E_n < \infty$$

Une borne sur les degrés

Hypothèse simplificatrice : $f(t) \in \mathcal{O}_L$

Soit $g_1(t), \dots, g_d(t)$ une base de \mathcal{O}_L sur $k[t]$

$$\text{Soit } E_n = \left\{ \sum_{i=1}^d \lambda_i(t) g_i(t), \text{ deg } \lambda_i(t) \leq n \right\}$$

$\dim_k E_n < \infty$ et $f \in E_n$ pour $n \gg 0$

Une borne sur les degrés

Hypothèse simplificatrice : $f(t) \in \mathcal{O}_L$

Soit $g_1(t), \dots, g_d(t)$ une base de \mathcal{O}_L sur $k[t]$

$$\text{Soit } E_n = \left\{ \sum_{i=1}^d \lambda_i(t) g_i(t), \text{ deg } \lambda_i(t) \leq n \right\}$$

$\dim_k E_n < \infty$ et $f \in E_n$ pour $n \gg 0$

$$S_r(\lambda(t)g_i(t))$$

Une borne sur les degrés

Hypothèse simplificatrice : $f(t) \in \mathcal{O}_L$

Soit $g_1(t), \dots, g_d(t)$ une base de \mathcal{O}_L sur $k[t]$

$$\text{Soit } E_n = \left\{ \sum_{i=1}^d \lambda_i(t) g_i(t), \text{ deg } \lambda_i(t) \leq n \right\}$$

$\dim_k E_n < \infty$ et $f \in E_n$ pour $n \gg 0$

$$S_r(\lambda(t)g_i(t)) = \sum_{r'=0}^{p-1} S_{r-r'}(\lambda(t)) S_{r'}(g_i(t))$$

Une borne sur les degrés

Hypothèse simplificatrice : $f(t) \in \mathcal{O}_L$

Soit $g_1(t), \dots, g_d(t)$ une base de \mathcal{O}_L sur $k[t]$

$$\text{Soit } E_n = \left\{ \sum_{i=1}^d \lambda_i(t) g_i(t), \text{ deg } \lambda_i(t) \leq n \right\}$$

$\dim_k E_n < \infty$ et $f \in E_n$ pour $n \gg 0$

$$\begin{aligned} S_r(\lambda(t)g_i(t)) &= \sum_{r'=0}^{p-1} S_{r-r'}(\lambda(t)) S_{r'}(g_i(t)) \\ &= \sum_{j=0}^d \lambda_j(t) g_j(t) \end{aligned}$$

Une borne sur les degrés

Hypothèse simplificatrice : $f(t) \in \mathcal{O}_L$

Soit $g_1(t), \dots, g_d(t)$ une base de \mathcal{O}_L sur $k[t]$

$$\text{Soit } E_n = \left\{ \sum_{i=1}^d \lambda_i(t) g_i(t), \text{ deg } \lambda_i(t) \leq n \right\}$$

$\dim_k E_n < \infty$ et $f \in E_n$ pour $n \gg 0$

$$\begin{aligned} S_r(\lambda(t)g_i(t)) &= \sum_{r'=0}^{p-1} S_{r-r'}(\lambda(t)) S_{r'}(g_i(t)) \\ &= \sum_{j=0}^d \lambda_j(t) g_j(t) \end{aligned}$$

$$\text{deg } \lambda_j \leq \frac{\text{deg } \lambda}{p} + \text{cte}$$

Une borne sur les degrés

Hypothèse simplificatrice : $f(t) \in \mathcal{O}_L$

Soit $g_1(t), \dots, g_d(t)$ une base de \mathcal{O}_L sur $k[t]$

$$\text{Soit } E_n = \left\{ \sum_{i=1}^d \lambda_i(t) g_i(t), \text{ deg } \lambda_i(t) \leq n \right\}$$

$\dim_k E_n < \infty$ et $f \in E_n$ pour $n \gg 0$

$$\begin{aligned} S_r(\lambda(t)g_i(t)) &= \sum_{r'=0}^{p-1} S_{r-r'}(\lambda(t)) S_{r'}(g_i(t)) \\ &= \sum_{j=0}^d \lambda_j(t) g_j(t) \end{aligned} \quad \text{deg } \lambda_j \leq \frac{\text{deg } \lambda}{p} + \text{cte}$$

Donc, pour $n \gg 0$,

l'espace E_n est stable par les S_r

Une borne sur les degrés

Hypothèse simplificatrice : $f(t) \in \mathcal{O}_L$

Soit $g_1(t), \dots, g_d(t)$ une base de \mathcal{O}_L sur $k[t]$

$$\text{Soit } E_n = \left\{ \sum_{i=1}^d \lambda_i(t) g_i(t), \text{ deg } \lambda_i(t) \leq n \right\}$$

$\dim_k E_n < \infty$ et $f \in E_n$ pour $n \gg 0$

$$\begin{aligned} S_r(\lambda(t)g_i(t)) &= \sum_{r'=0}^{p-1} S_{r-r'}(\lambda(t)) S_{r'}(g_i(t)) \\ &= \sum_{j=0}^d \lambda_j(t) g_j(t) \end{aligned}$$

$$\text{deg } \lambda_j \leq \frac{\text{deg } \lambda}{p} + \text{cte}$$

Donc, pour $n \gg 0$,
l'espace E_n est stable par les S_r



Une question algorithmique

Une question algorithmique

– pour les algorithmiciens –

Le contexte

Le contexte

Le problème algorithmique

Le contexte

Le problème algorithmique

Entrée :

Le contexte

Le problème algorithmique

Entrée : le polynôme bivarié $E(t, y)$
le début du développement de f

Le contexte

Le problème algorithmique

Entrée : le polynôme bivarié $E(t, y)$
le début du développement de f
un entier N

Le contexte

Le problème algorithmique

Entrée : le polynôme bivarié $E(t, y)$
le début du développement de f
un entier N

Sortie : le coefficient a_N de f devant t^N

Le contexte

Le problème algorithmique

Entrée : le polynôme bivarié $E(t, y)$
le début du développement de f
un entier N

Sortie : le coefficient a_N de f devant t^N

Stratégie

Le contexte

Le problème algorithmique

Entrée : le polynôme bivarié $E(t, y)$
le début du développement de f
un entier N

Sortie : le coefficient a_N de f devant t^N

Stratégie

On écrit $N = \overline{r_\ell \cdots r_1 r_0}^p$

Le contexte

Le problème algorithmique

Entrée : le polynôme bivarié $E(t, y)$
le début du développement de f
un entier N

Sortie : le coefficient a_N de f devant t^N

Stratégie

On écrit $N = \overline{r_\ell \cdots r_1 r_0}^p$ et $a_N = (S_{r_\ell} \cdots S_{r_1} S_{r_0} f)(0)^{p^{\ell+1}}$

Le contexte

Le problème algorithmique

Entrée : le polynôme bivarié $E(t, y)$
le début du développement de f
un entier N

Sortie : le coefficient a_N de f devant t^N

Stratégie

On écrit $N = \overline{r_\ell \cdots r_1 r_0}^p$ et $a_N = (S_{r_\ell} \cdots S_{r_1} S_{r_0} f)(0)^{p^{\ell+1}}$

On calcule les (matrices des) opérateurs S_r
agissant sur un espace de dimension finie contenant f

Le contexte

Le problème algorithmique

Entrée : le polynôme bivarié $E(t, y)$
le début du développement de f
un entier N

Sortie : le coefficient a_N de f devant t^N

Stratégie

On écrit $N = \overline{r_\ell \cdots r_1 r_0}^p$ et $a_N = (S_{r_\ell} \cdots S_{r_1} S_{r_0} f)(0)^{p^{\ell+1}}$

On calcule les (matrices des) opérateurs S_r
agissant sur un espace de dimension finie contenant f

Complexité attendue

Le contexte

Le problème algorithmique

Entrée : le polynôme bivarié $E(t, y)$
le début du développement de f
un entier N

Sortie : le coefficient a_N de f devant t^N

Stratégie

On écrit $N = \overline{r_\ell \cdots r_1 r_0}^p$ et $a_N = (S_{r_\ell} \cdots S_{r_1} S_{r_0} f)(0)^{p^{\ell+1}}$

On calcule les (matrices des) opérateurs S_r
agissant sur un espace de dimension finie contenant f

Complexité attendue : $O(\log_p N)$

Retour sur les démonstrations

Retour sur les démonstrations

Première démonstration (analytique)

Retour sur les démonstrations

Première démonstration (analytique)

- ↳ Espace de confinement explicite

Retour sur les démonstrations

Première démonstration (analytique)

↳ Espace de confinement explicite

$$\text{Diag } \frac{1}{b(x,y)} k[x, y]_{\leq (d-1, h)}$$

Retour sur les démonstrations

Première démonstration (analytique)

↳ Espace de confinement explicite

$$\text{Diag } \frac{1}{b(x,y)} k[x, y]_{\leq (d-1, h)}$$

Retour sur les démonstrations

Première démonstration (analytique)

- ↳ Espace de confinement explicite $\text{Diag } \frac{1}{b(x,y)} k[x, y]_{\leq (d-1, h)}$
- ↳ Espace de confinement de dimension contrôlée

Retour sur les démonstrations

Première démonstration (analytique)

- ↳ Espace de confinement explicite Diag $\frac{1}{b(x,y)} k[x, y]_{\leq (d-1, h)}$
- ↳ Espace de confinement de dimension contrôlée
- ↳ Passage par les polynômes bivariés

Retour sur les démonstrations

Première démonstration (analytique)

- ↳ Espace de confinement explicite $\text{Diag } \frac{1}{b(x,y)} k[x, y]_{\leq (d-1, h)}$
- ↳ Espace de confinement de dimension contrôlée
- ↳ Passage par les polynômes bivariés
- ↳ Hypothèses dans le théorème de Furstenberg

Retour sur les démonstrations

Première démonstration (analytique)

- ↳ Espace de confinement explicite
- ↳ Espace de confinement de dimension contrôlée
- ↳ Passage par les polynômes bivariés
- ↳ Hypothèses dans le théorème de Furstenberg

$$E(0,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial E}{\partial y}(0,0) \neq 0$$

Retour sur les démonstrations

Première démonstration (analytique)

- ↳ Espace de confinement explicite
- ↳ Espace de confinement de dimension contrôlée
- ↳ Passage par les polynômes bivariés
- ↳ Hypothèses dans le théorème de Furstenberg

$$E(0,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial E}{\partial y}(0,0) \neq 0$$

Approche exploitée par Bostan, Christol, Dumas [2016]

Retour sur les démonstrations

Première démonstration (analytique)

- ↳ Espace de confinement explicite $\text{Diag } \frac{1}{b(x,y)} k[x, y]_{\leq (d-1, h)}$
- ↳ Espace de confinement de dimension contrôlée
- ↳ Passage par les polynômes bivariés
- ↳ Hypothèses dans le théorème de Furstenberg

$$E(0, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial E}{\partial y}(0, 0) \neq 0$$

Approche exploitée par Bostan, Christol, Dumas (2016)

algorithme en $\mathcal{O}((d+h)^5 hp + (d+h)^2 h^2 \log N)$

Retour sur les démonstrations

Première démonstration (analytique)

- ↳ Espace de confinement explicite $\text{Diag } \frac{1}{b(x,y)} k[x, y]_{\leq (d-1, h)}$
- ↳ Espace de confinement de dimension contrôlée
- ↳ Passage par les polynômes bivariés
- ↳ Hypothèses dans le théorème de Furstenberg

$$E(0, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial E}{\partial y}(0, 0) \neq 0$$

Approche exploitée par Bostan, Christol, Dumas (2016)

$$\text{algorithme en } \mathcal{O}((d+h)^5 hp + (d+h)^2 h^2 \log N)$$

Deuxième/troisième démonstration (géométrie algébrique)

Retour sur les démonstrations

Première démonstration (analytique)

- ↳ Espace de confinement explicite $\text{Diag } \frac{1}{b(x,y)} k[x, y]_{\leq (d-1, h)}$
- ↳ Espace de confinement de dimension contrôlée
- ↳ Passage par les polynômes bivariés
- ↳ Hypothèses dans le théorème de Furstenberg

$$E(0, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial E}{\partial y}(0, 0) \neq 0$$

Approche exploitée par Bostan, Christol, Dumas (2016)

algorithme en $\mathcal{O}((d+h)^5 hp + (d+h)^2 h^2 \log N)$

Deuxième/troisième démonstration (géométrie algébrique)

- ↳ Espace de confinement délicat à calculer

Retour sur les démonstrations

Première démonstration (analytique)

- ↳ Espace de confinement explicite $\text{Diag } \frac{1}{b(x,y)} k[x, y]_{\leq (d-1, h)}$
- ↳ Espace de confinement de dimension contrôlée
- ↳ Passage par les polynômes bivariés
- ↳ Hypothèses dans le théorème de Furstenberg

$$E(0, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial E}{\partial y}(0, 0) \neq 0$$

Approche exploitée par Bostan, Christol, Dumas (2016)

algorithme en $\mathcal{O}((d+h)^5 hp + (d+h)^2 h^2 \log N)$

Deuxième/troisième démonstration (géométrie algébrique)

- ↳ Espace de confinement délicat à calculer calcul de \mathcal{O}_L

Retour sur les démonstrations

Première démonstration (analytique)

- ↳ Espace de confinement explicite Diag $\frac{1}{b(x,y)} k[x, y]_{\leq (d-1, h)}$
- ↳ Espace de confinement de dimension contrôlée
- ↳ Passage par les polynômes bivariés
- ↳ Hypothèses dans le théorème de Furstenberg

$$E(0, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial E}{\partial y}(0, 0) \neq 0$$

Approche exploitée par Bostan, Christol, Dumas (2016)

algorithme en $\mathcal{O}((d+h)^5 hp + (d+h)^2 h^2 \log N)$

Deuxième/troisième démonstration (géométrie algébrique)

- ↳ Espace de confinement délicat à calculer calcul de \mathcal{O}_L
- ↳ Espace de confinement de dimension contrôlée

Retour sur les démonstrations

Première démonstration (analytique)

- ↳ Espace de confinement explicite $\text{Diag } \frac{1}{b(x,y)} k[x, y]_{\leq (d-1, h)}$
- ↳ Espace de confinement de dimension contrôlée
- ↳ Passage par les polynômes bivariés
- ↳ Hypothèses dans le théorème de Furstenberg

$$E(0, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial E}{\partial y}(0, 0) \neq 0$$

Approche exploitée par Bostan, Christol, Dumas (2016)

$$\text{algorithme en } \mathcal{O}((d+h)^5 hp + (d+h)^2 h^2 \log N)$$

Deuxième/troisième démonstration (géométrie algébrique)

- ↳ Espace de confinement délicat à calculer calcul de \mathcal{O}_L
- ↳ Espace de confinement de dimension contrôlée
par le genre de la courbe via le théorème de Riemann-Roch (Bridy, 2017)

Retour sur les démonstrations

Première démonstration (analytique)

- ↳ Espace de confinement explicite $\text{Diag } \frac{1}{b(x,y)} k[x, y]_{\leq (d-1, h)}$
- ↳ Espace de confinement de dimension contrôlée
- ↳ Passage par les polynômes bivariés
- ↳ Hypothèses dans le théorème de Furstenberg

$$E(0, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial E}{\partial y}(0, 0) \neq 0$$

Approche exploitée par Bostan, Christol, Dumas (2016)

$$\text{algorithme en } \mathcal{O}((d+h)^5 hp + (d+h)^2 h^2 \log N)$$

Deuxième/troisième démonstration (géométrie algébrique)

- ↳ Espace de confinement délicat à calculer calcul de \mathcal{O}_L
- ↳ Espace de confinement de dimension contrôlée
par le genre de la courbe via le théorème de Riemann-Roch (Bridy, 2017)
- ↳ Objets exclusivement unidimensionnels

Retour sur les démonstrations

Première démonstration (analytique)

- ↳ Espace de confinement explicite $\text{Diag } \frac{1}{b(x,y)} k[x, y]_{\leq (d-1, h)}$
- ↳ Espace de confinement de dimension contrôlée
- ↳ Passage par les polynômes bivariés
- ↳ Hypothèses dans le théorème de Furstenberg

$$E(0, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial E}{\partial y}(0, 0) \neq 0$$

Approche exploitée par Bostan, Christol, Dumas (2016)

$$\text{algorithme en } \mathcal{O}((d+h)^5 hp + (d+h)^2 h^2 \log N)$$

Deuxième/troisième démonstration (géométrie algébrique)

- ↳ Espace de confinement délicat à calculer calcul de \mathcal{O}_L
- ↳ Espace de confinement de dimension contrôlée
par le genre de la courbe via le théorème de Riemann-Roch (Bridy, 2017)
- ↳ Objets exclusivement unidimensionnels

$$\text{tout vit dans } L = k(t)[f]$$

Une variante adaptée à nos besoins :
Confinement explicite et contrôlé

Une variante adaptée à nos besoins : Confinement explicite et contrôlé

Théorème (BC²D, 2018)

Le k -espace vectoriel formé des quantités

$$\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \text{avec} \quad a_i(t) \in k[t], \deg a_i(t) < h$$

est stable par les S_r

Une variante adaptée à nos besoins : Confinement explicite et contrôlé

Théorème (BC²D, 2018)

Le k -espace vectoriel formé des quantités

$$\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \text{avec} \quad a_i(t) \in k[t], \deg a_i(t) < h$$

est stable par les S_r

Idées de la démonstration

Une variante adaptée à nos besoins : Confinement explicite et contrôlé

Théorème (BC²D, 2018)

Le k -espace vectoriel formé des quantités

$$\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \text{avec} \quad a_i(t) \in k[t], \deg a_i(t) < h$$

est stable par les S_r

Idées de la démonstration

Sous les hypothèses du théorème de Furstenberg

Une variante adaptée à nos besoins : Confinement explicite et contrôlé

Théorème (BC²D, 2018)

Le k -espace vectoriel formé des quantités

$$\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \text{avec } a_i(t) \in k[t], \deg a_i(t) < h$$

est stable par les S_r

Idées de la démonstration

Sous les hypothèses du théorème de Furstenberg,
l'espace vectoriel de l'énoncé est $\text{Diag } \frac{1}{b(x,y)} k[x, y]_{\leq (d-1, h)}$

Une variante adaptée à nos besoins : Confinement explicite et contrôlé

Théorème (BC²D, 2018)

Le k -espace vectoriel formé des quantités

$$\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \text{avec } a_i(t) \in k[t], \deg a_i(t) < h$$

est stable par les S_r

Idées de la démonstration

Sous les hypothèses du théorème de Furstenberg,
l'espace vectoriel de l'énoncé est $\text{Diag } \frac{1}{b(x,y)} k[x, y]_{\leq (d-1, h)}$

Sinon on reprend la démonstration
de Furstenberg

Une variante adaptée à nos besoins : Confinement explicite et contrôlé

Théorème (BC²D, 2018)

Le k -espace vectoriel formé des quantités

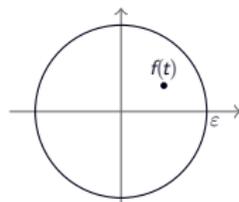
$$\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \text{avec} \quad a_i(t) \in k[t], \quad \deg a_i(t) < h$$

est stable par les S_r

Idées de la démonstration

Sous les hypothèses du théorème de Furstenberg,
l'espace vectoriel de l'énoncé est $\text{Diag } \frac{1}{b(x,y)} k[x, y]_{\leq (d-1, h)}$

Sinon on reprend la démonstration
de Furstenberg



Une variante adaptée à nos besoins : Confinement explicite et contrôlé

Théorème (BC²D, 2018)

Le k -espace vectoriel formé des quantités

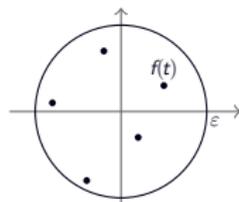
$$\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \text{avec } a_i(t) \in k[t], \deg a_i(t) < h$$

est stable par les S_r

Idées de la démonstration

Sous les hypothèses du théorème de Furstenberg,
l'espace vectoriel de l'énoncé est $\text{Diag } \frac{1}{b(x,y)} k[x, y]_{\leq (d-1, h)}$

Sinon on reprend la démonstration
de Furstenberg



Une variante adaptée à nos besoins : Confinement explicite et contrôlé

Théorème (BC²D, 2018)

Le k -espace vectoriel formé des quantités

$$\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \text{avec } a_i(t) \in k[t], \deg a_i(t) < h$$

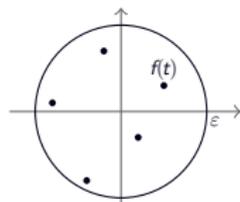
est stable par les S_r

Idées de la démonstration

Sous les hypothèses du théorème de Furstenberg,
l'espace vectoriel de l'énoncé est $\text{Diag } \frac{1}{b(x,y)} k[x, y]_{\leq (d-1, h)}$

Sinon on reprend la démonstration
de Furstenberg... mais, de surcroît :

☞ on travaille avec le résidu en $f(t)$



Une variante adaptée à nos besoins : Confinement explicite et contrôlé

Théorème (BC²D, 2018)

Le k -espace vectoriel formé des quantités

$$\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \text{avec} \quad a_i(t) \in k[t], \quad \deg a_i(t) < h$$

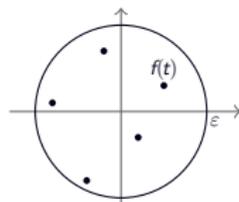
est stable par les S_r

Idées de la démonstration

Sous les hypothèses du théorème de Furstenberg,
l'espace vectoriel de l'énoncé est $\text{Diag } \frac{1}{b(x,y)} k[x, y]_{\leq (d-1, h)}$

Sinon on reprend la démonstration
de Furstenberg... mais, de surcroît :

- ☞ on travaille avec le résidu en $f(t)$
- ☞ on « globalise » les S_r agissant sur $k[[x, y]]$
en les interprétant à l'aide d'opérateurs de Cartier



Action des opérateurs de section

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))}$$

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))}$$

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))}$$

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \deg b_i(t) < h$$

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \deg b_i(t) < h$$

Système linéaire

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \deg b_i(t) < h$$

Système linéaire quasi-Toeplitz de rang de déplacement d

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \deg b_i(t) < h$$

Systeme linéaire quasi-Toeplitz de rang de déplacement d

Précalcul

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \deg b_i(t) < h$$

Système linéaire quasi-Toeplitz de rang de déplacement d

Précalcul

Calcul des $\frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \bmod t^{O(dhp)}$

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \deg b_i(t) < h$$

Systeme linéaire quasi-Toeplitz de rang de déplacement d

Précalcul

Calcul des $\frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \bmod t^{O(dhp)} \dots \dots \dots \tilde{O}(d^2hp)$

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \text{deg } b_i(t) < h$$

Système linéaire quasi-Toeplitz de rang de déplacement d

Précalcul

Calcul des $\frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \bmod t^{O(dhp)} \dots \dots \dots \mathcal{O}(d^2hp)$

Inversion du système quasi-Toeplitz

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \deg b_i(t) < h$$

Système linéaire quasi-Toeplitz de rang de déplacement d

Précalcul

Calcul des $\frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \bmod t^{O(dhp)} \dots \mathcal{O}(d^2 hp)$

Inversion du système quasi-Toeplitz $\dots \mathcal{O}(d^\omega h)$

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \deg b_i(t) < h$$

Système linéaire quasi-Toeplitz de rang de déplacement d

Précalcul

Calcul des $\frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \bmod t^{O(dhp)} \dots \mathcal{O}(d^2 hp)$

Inversion du système quasi-Toeplitz $\dots \mathcal{O}(d^\omega h)$

Calcul proprement dit

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \text{deg } b_i(t) < h$$

Système linéaire quasi-Toeplitz de rang de déplacement d

Précalcul

Calcul des $\frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \bmod t^{O(dhp)} \dots \mathcal{O}(d^2 hp)$

Inversion du système quasi-Toeplitz $\dots \mathcal{O}(d^\omega h)$

Calcul proprement dit

Évaluation du membre de gauche

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \deg b_i(t) < h$$

Système linéaire quasi-Toeplitz de rang de déplacement d

Précalcul

Calcul des $\frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \bmod t^{O(dhp)} \dots \dots \dots O(d^2hp)$

Inversion du système quasi-Toeplitz $\dots \dots \dots O(d^\omega h)$

Calcul proprement dit

Évaluation du membre de gauche $\dots \dots \dots O(d^2h^2)$

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \deg b_i(t) < h$$

Système linéaire quasi-Toeplitz de rang de déplacement d

Précalcul

Calcul des $\frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \bmod t^{O(dhp)} \dots \dots \dots O(d^2 hp)$

Inversion du système quasi-Toeplitz $\dots \dots \dots O(d^\omega h)$

Calcul proprement dit

Évaluation du membre de gauche $\dots \dots \dots O(d^2 h^2)$

Résolution du système

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \deg b_i(t) < h$$

Système linéaire quasi-Toeplitz de rang de déplacement d

Précalcul

Calcul des $\frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \bmod t^{O(dhp)} \dots \dots \dots O(d^2 hp)$

Inversion du système quasi-Toeplitz $\dots \dots \dots O(d^\omega h)$

Calcul proprement dit

Évaluation du membre de gauche $\dots \dots \dots O(d^2 h^2)$

Résolution du système $\dots \dots \dots O(d^2 h^2)$

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \deg b_i(t) < h$$

Système linéaire quasi-Toeplitz de rang de déplacement d

Précalcul

Calcul des $\frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \bmod t^{O(dhp)} \dots \dots \dots O(d^2hp)$

Inversion du système quasi-Toeplitz $\dots \dots \dots O(d^\omega h)$

Calcul proprement dit

Évaluation du membre de gauche $\dots \dots \dots O(d^2h^2)$

Résolution du système $\dots \dots \dots O(d^2h^2)$

Coût total

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \deg b_i(t) < h$$

Système linéaire quasi-Toeplitz de rang de déplacement d

Précalcul

Hypothèse
 $d, h \ll p$

Calcul des $\frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \bmod t^{O(dhp)} \dots\dots\dots O(d^2 hp)$

Inversion du système quasi-Toeplitz $\dots\dots\dots O(d^\omega h)$

Calcul proprement dit

Évaluation du membre de gauche $\dots\dots\dots O(d^2 h^2)$

Résolution du système $\dots\dots\dots O(d^2 h^2)$

Coût total

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \deg b_i(t) < h$$

Système linéaire quasi-Toeplitz de rang de déplacement d

Précalcul

Hypothèse
 $d, h \ll p$

Calcul des $\frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \bmod t^{O(dhp)} \dots \dots \dots O(d^2 hp)$

Inversion du système quasi-Toeplitz $\dots \dots \dots O(d^\omega h)$

Calcul proprement dit

Évaluation du membre de gauche $\dots \dots \dots O(d^2 h^2)$

Résolution du système $\dots \dots \dots O(d^2 h^2)$

Coût total

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \deg b_i(t) < h$$

Système linéaire quasi-Toeplitz de rang de déplacement d

Précalcul

Hypothèse
 $d, h \ll p$

Calcul des $\frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \bmod t^{O(dhp)} \dots \dots \dots O(d^2 hp)$

Inversion du système quasi-Toeplitz $\dots \dots \dots O(d^{\omega} h)$

Calcul proprement dit

Évaluation du membre de gauche $\dots \dots \dots O(d^2 h^2)$

Résolution du système $\dots \dots \dots O(d^2 h^2)$

Coût total $O(d^2 hp) + O(d^2 h^2 \log N)$

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \deg b_i(t) < h$$

Système linéaire quasi-Toeplitz de rang de déplacement d

Précalcul

Hypothèse
 $d, h \ll p$

Calcul des $\frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \bmod t^{O(dhp)} \dots \tilde{O}(d^2 hp)$

Inversion du système quasi-Toeplitz $\dots \tilde{O}(d^\omega h)$

Calcul proprement dit

Évaluation du membre de gauche $\dots O(d^2 h^2)$

Résolution du système $\dots O(d^2 h^2)$

Coût total $\tilde{O}(d^2 hp) + O(d^2 h^2 \log N)$

Bostan, Christol, Dumas $\tilde{O}(D^5 hp) + O(D^2 h^2 \log N)$

$D = d + h$

Action des opérateurs de section

$$S_r \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \right) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i(t) \frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \quad \text{deg } b_i(t) < h$$

Système linéaire quasi-Toeplitz de rang de déplacement d

Précalcul

Hypothèse
 $d, h \ll p$

Calcul des $\frac{f(t)^i}{\frac{\partial E}{\partial y}(t, f(t))} \bmod t^{O(dhp)}$ $O(d^2 hp)$

Inversion du système quasi-Toeplitz $O(d^\omega h)$

Calcul proprement dit

Évaluation du membre de gauche $O(d^2 h^2)$

Résolution du système $O(d^2 h^2)$

Coût total

$O(d^2 hp) + O(d^2 h^2 \log N)$

Bostan, Christol, Dumas

$O(D^5 hp) + O(D^2 h^2 \log N)$

$D = d + h$

Merci
de votre
attention