Optimisation de portefeuille : modélisation stochastique et optimisation topologique

Mbaye Diouf

On se propose dans cet exposé de présenter l'optimisation de portefeuille par la modélisation stochastique et l'optimisation topologique, un domaine de recherche se situant à l'interface des mathématiques, de l'informatique et de la finance.

Après un aperçu sur les concepts de base et la terminologie, nous présentons le modèle Moyenne-Variance développé par Harry Markowitz au cours des années 50. Ce modèle est caractérisé par la maximisation du rendement espééré et la minimisation de la variance du rendement ou risque. Un accent est aussi mis sur des applications pour consolider les acquis.

Nous découvrons ensuite le modèle de Black-Scholes considéré comme une avancée fondamentale en Finance et qui propose une formule d'évaluation d'options. Il fut publié en 1973 et est donné par une dynamique du sous-jacent comme mouvement Brownien. Avec sa simplicité d'application, son importante utilisation par les opérateurs financiers, il permet de calculer la volatilité qui mesure la variation moyenne dans le temps d'un actif financier et donne donc une information sur le risque.

Il convient de souligner le lien qui existe entre le calcul d'options et l'équation de la chaleur. On choisit d'utiliser un schéma implicite aux différences finies pour obtenir une approximation de la solution de cette équation.

Nous évoquons aussi la notion de gradient topologique qui pour objectif d'optimiser un domaine $]0, A[$ dans lequel l'équation de la chaleur découlant notamment de l'équation de Black-Scholes est définie afin de minimiser une fonctionnelle J associée. Pour cela on se propose de modifier la topologie de $]0, A[$ en plaçant un trou de rayon ρ en un point $x_0 \in]0, A[$. Le développement asymptotique de J permet alors d'évaluer le gradient topologique $g(x_0)$ de J en x_0 et de construire une famille de points $(\tau, x_0^n, g(x_0^n))$ désignant la frontière efficiente, où $g(x_0^n)$ est proche de 0 et τ est le temps.

On dispose enfin de graphes pour comprendre la variation de la valeur d'une option en fonction du temps et du sous-jacent. Des schémas numériques permettent de mieux interpréter les équations aux dérivées partielles issues des modèles étudiés.

Références

[1] F. Aftalion ; *La Nouvelle Finance et la gestion de portefeuille*, Paris, Economica, "Gestion", (1^{er} *Octobre* 2003), 240 *p*.

[2] Philippe Bernard ; *La théorie du portefeuille : une introduction*, Ingénierie Economique et Financière, Université Paris-Dauphine, (*Avril* 2006).

[3] Louis Bachelier ; *Théorie de la spéculation*, Annales scientifiques de l'É.N.S., 3^e série, tome 17, (1900), pp. $21-86$.

[4] Harry Markowitz ; *Portfolio Selection*, The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1, Mar. (1952), pp. $77-91$.

[5] Robert Goffin ; *Principes de Finance Moderne*, Paris, Economica, "Finance", 6$^{\text{è}}$ éd., (05/01/2012), 664 *p*.

[6] Éric Bayle, Marc Schwartz ; *Fonctionnement des systèmes bancaires et financiers*, Revue d'économie financière, n°81, (2005), pp. $211-235$.

[7] Thierry Roncalli ; *La gestion des risques financiers*, Paris, Economica, 2$^{\text{è}me}$ édition, (2009), 557 *p*.

[8] David Heath, Robert Jarrow, Andrew Morton ; *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A New Methodology for Contingent Claims Valuation*, Econometrica, The Econometric Society, Vol. 60, No. 1, (Jan., 1992), pp. $77-105$.

[9] Fateh Belaid and Daniel De Wolf ; *Sélection du portefeuille de projets d'exploration production en utilisant la méthode de Markowitz*, Nancy, 10$^{\text{è}}$ conférence de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision, ($10-fév-2009$), 22 *p*.

[10] D. Lamberton and B. Lapeyre ; *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Paris, second ed., Ellipses, "Edition Marketing", (1997), 176 *p*.

[11] François Jubin ; *Outils théoriques du modèle standard*, Paris 9, Witam Patrimoine Finance Actuariat, (2003), 41 *p*.

[12] Patrick Navatte ; *Finance d'Entreprise et Théorie des Options*, Paris, Economica, "Gestion", (1998), 304 *p*.

[13] Nguyen Chi Thanh ; *Priçing d'option financière par la méthode des EDP*, PARIS 6, Université Pierre et Marie CURIE, Paris Universitas, ($2007-2008$).

[14] Jacques-Hervé Saiac ; *Introduction aux méthodes mathématiques et numériques en vue des applications en finance*, CNAM, (3 *avril* 2007), 158 *p*.

[15] Daniel Sevcovic ; *Analysis of the free boundary for the pricing of an American call option*, Euro Jnl of Applied Mathematics, Institute of Applied Mathematics, Faculty of Mathematics & Physics, Comenius University, Slovak Republic, vol. 12, (2001), pp. $25-37$.

[16] Jean Cea ; *Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût*, RAIRO-Modélisation mathématique et analyse numérique, $n°3$, tome 20, (1986), pp. $371-402$.

[17] O. Pantz ; *Topological Gradient*, CMAP, ($January\ 28^{th},\ 2015$).

[18] Samuel Amstutz, Takéo Takahashi and Boris Vexler ; *Topological sensitivity analysis for time-dependent problems*, ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations 14, (2008), pp. $427-455$.

[19] J. Sokolowski, A. Zochowski ; *On the topological derivative in shape optimization*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 37, $n°4$, ($July$ 1999), pp. $1251-1272$.

[20] Didier Auroux, Jérôme Fehrenbach ; *Les méthodes de gradient topologique*, Toulouse 3, CNRS, Université Paul Sabatier, Mathématiques pour l'industrie et la physique, ($3-4$ *Février* 2005), 17 *p*.